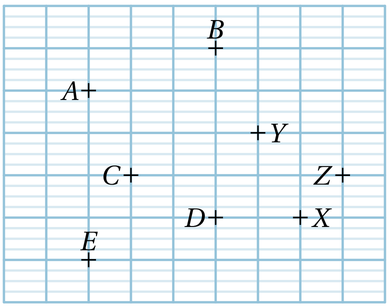
1 Rappel : Translations

Exercice 1.



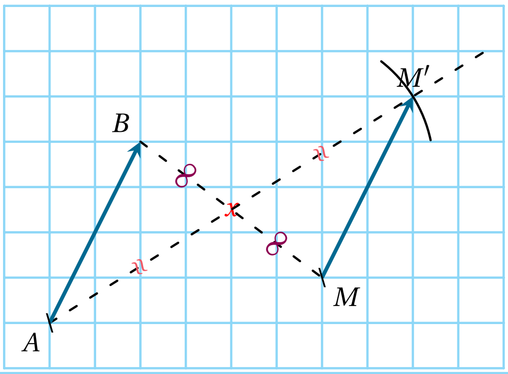
On considère la translation qui transforme A en B.

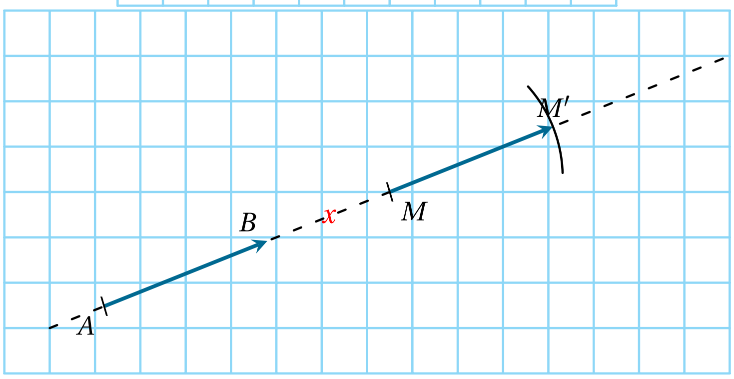
1. Donner les images des points C, D, E par cette translation.
2. Citer les trois parallélogrammes associés aux réponses de la question 1.

Définition 1.

On considère deux points A et B du plan.
La **translation qui transforme A en B** transforme tout point M du plan en l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

Une transformation du plan est une fonction du plan dans lui même, elle associe à chaque point M du plan un unique point M′, mais de plus, chaque point du plan admet un unique antécédent.





- Le point M' est appelé **image** du point M par cette translation.
- On dit également que M' est le **translaté** de M par cette translation.

Propriété 1.

On considère quatre points A, B, C et D non alignés.
Dire que la translation qui transforme A en B transforme C en D équivaut à dire que $ABDC$ est un **parallélogramme**.
Attention à l'ordre des points.

Preuve.

C'est la conséquence de la propriété « *un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu* ».

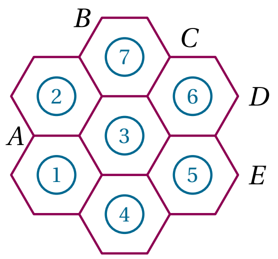
2 Vecteurs

Définition 2.

À chaque translation est associé un **vecteur**.
Pour A et B deux points, le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ est associé à la translation qui transforme A en B.
A est l'**origine** du vecteur et B est son **extrémité**.

Exercice 2.

La figure ci-dessous représente sept hexagones réguliers et numérotés.



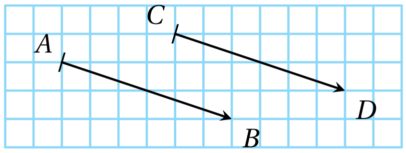
Déterminer l'image :

1. de l'hexagone 1 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$;
2. de l'hexagone 4 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$;
3. de l'hexagone 7 dans la translation de vecteur $\overrightarrow{DE}$.

Il existe une ***infinité*** *de vecteurs associés à une translation. Ils sont tous égaux. Le vecteur choisi pour définir la translation est un* ***représentant*** *de tous ces vecteurs. La translation* ***ne dépend pas*** *du représentant choisi pour la définir. On le note souvent* $\vec{u}$*.*

Définition 3.

Deux vecteurs qui définissent la même translation sont dits **égaux**.



Propriété 2.

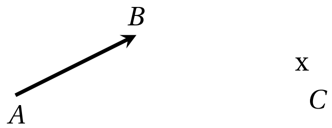
On considère quatre points A, B, C et D non alignés. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme. (**Attention** à l'ordre des points !)

Exercice 3.

Reprendre la figure de l'exercice 1 et citer tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$.

Méthode 1.

Construire un vecteur
Construire le point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.



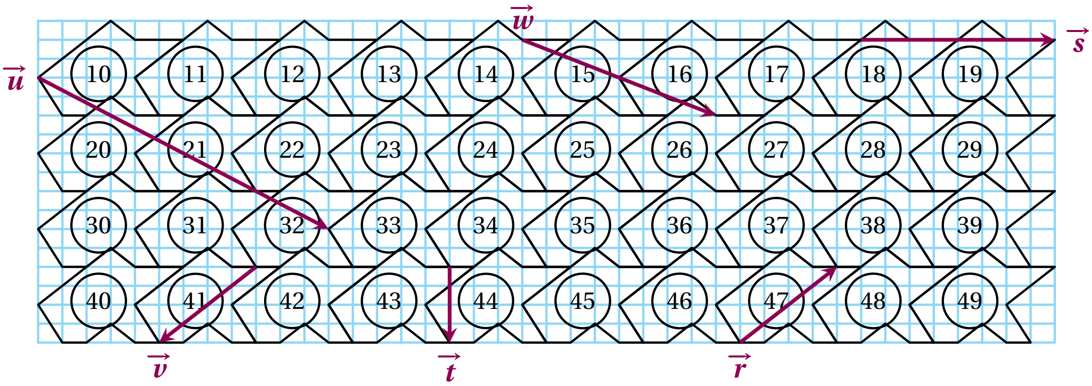
Pour construire le point D, il faut construire le ....

Définition 4.

Le vecteur associé à la translation qui transforme un point quelconque en lui-même est le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$.
Ainsi, $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots = \vec{0}$

3 Somme de deux vecteurs

Activité.
Cette activité consiste à étudier l'enchaînement de deux translations sur un damier de carreaux Zellige, un carrelage décoratif originaire de l'Antiquité Méditerranéenne et du Moyen Orient.



1. **Enchaînement 1**
   - **a.** Quelle est l'image du carreau 13 par la translation de vecteur $\vec{u}$?
   - **b.** Quelle est l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{v}$?
   - **c.** Émettre une conjecture sur la nature de la transformation correspondant à l'enchaînement de ces deux translations.

Propriété 3.

L'enchaînement de deux translations est également une ....

Définition 5.

On appelle somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On le note $\vec{u} + \vec{v}$.

2. **Enchaînement 2**
   - **a.** Quelle est l'image du carreau 13 par la translation de vecteur $\vec{s}$?
   - **b.** Quelle est l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{t}$?
   - **c.** Émettre une conjecture sur $\vec{s} + \vec{t}$.
3. **Enchaînement 3**
   - **a.** Quelle est l'image du carreau 13 par la translation de vecteur $\vec{v}$?
   - **b.** Quelle est l'image de cette image par la translation de vecteur $\vec{r}$?
   - **c.** Émettre une conjecture sur $\vec{v} + \vec{r}$.

Propriété 4.

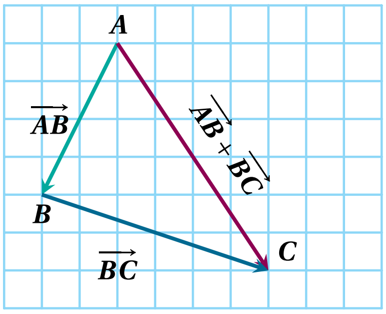
Cette relation est fondamentale, elle permet de simplifier des sommes de vecteurs, ou de transformer une expression dans la résolution de nombreux problèmes

Relation de Chasles

Soit A, B, C trois points. L'enchaînement de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$ et on a :

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

.



Remarque 1
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$

Exercice 4.

Compléter avec les lettres qui conviennent.

1. $\overrightarrow{HL}=\overrightarrow{\dots C}+\overrightarrow{\dots\quad\dots}$
2. $\overrightarrow{A\dots}=\overrightarrow{\dots C}+\overrightarrow{\dots B}$
3. $\overrightarrow{\dots E}=\overrightarrow{A\dots}+\overrightarrow{K\dots}$

Définition 6.

Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé **vecteur opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Notation

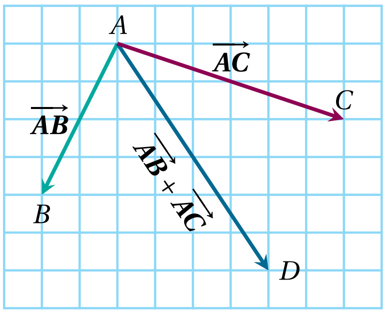
- Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ se note $-\overrightarrow{AB}$ et on a l'égalité $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.
- La notation $\overleftarrow{AB}$ n'existe pas.

Propriété 5.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Alors :
- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}$ (l'addition des vecteurs est commutative).
- $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{u}$ (le vecteur $\overrightarrow{0}$ est l'élément neutre de cette addition).

Propriété 6.

Soit A, B, C, D quatre points non alignés.
Dire que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ équivaut à dire que $ABDC$ est un parallélogramme. **(Attention à l'ordre des points.)**



Preuve.

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Relation de Chasles $\iff \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

On ajoute $\overrightarrow{CA}$ $\iff \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}}_{\vec{0}}$

Relation de Chasles $\iff \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

Voir la propriété 2 $\iff$ $ABDC$ est un parallélogramme.

Méthode 2.

Construire la somme de deux vecteurs.
On remplace l'un des deux vecteurs par un représentant :

- soit d'origine l'extrémité de l'autre afin d'utiliser la relation de Chasles.
- soit de même origine afin d'utiliser la règle du parallélogramme ;

On considère un carré $ABCD$ de centre O.

1. Construire le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD}$ en utilisant la relation de Chasles.
2. Construire le vecteur $\vec{v} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OC}$ en utilisant la règle du parallélogramme.

Figure pour la question 1, avec la relation de Chasles :

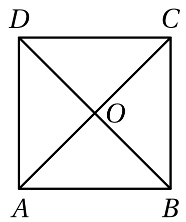
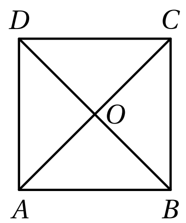


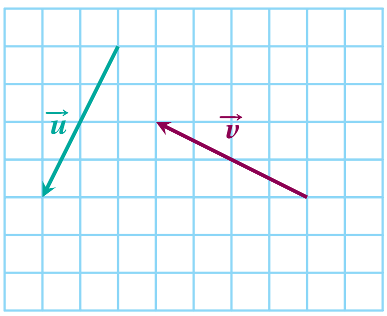
Figure pour la question 2, avec la règle du parallélogramme :



Exercice 5.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant donnés, proposer une méthode de construction de $\vec{u} - \vec{v}$.

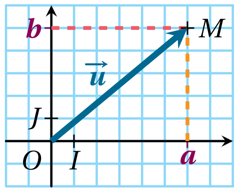
On remarquera que $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$



4 Coordonnées d'un vecteur

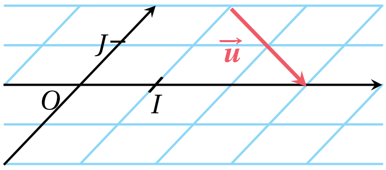
Définition 7.

Dans un repère $(O; I, J)$, on considère la translation de vecteur $\vec{u}$ qui translate l'origine O en un point M de coordonnées $(a; b)$.
Les **coordonnées du vecteur $\vec{u}$** sont les coordonnées du point M. On a $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et on note $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



Exercice 6.

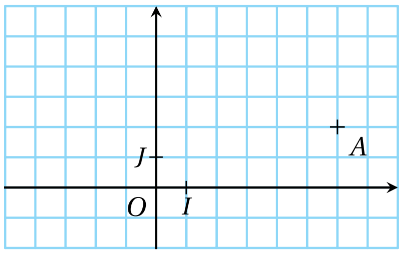
Lire les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sur la figure ci-dessous.



Exercice 7.

Construire un vecteur dont on connaît les coordonnées.

Dans un repère orthonormé, construire le représentant d'origine $A(6; 2)$ du vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Propriété 7.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ces vecteurs ont les mêmes coordonnées.

Propriété 8.

Dans un repère $(O; I, J)$, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Exercice 8.

Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour :

1. $A(2;5)$ et $B(6;7)$;
2. $A(-1;2)$ et $B(-2;-3)$.

Exercice 9.

Dans le plan muni d'un repère, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ sont $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, celles du point $A(5;2)$.
Calculer les coordonnées du point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

Propriété 9.

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.

5 Produit d'un vecteur par réel, colinéarité

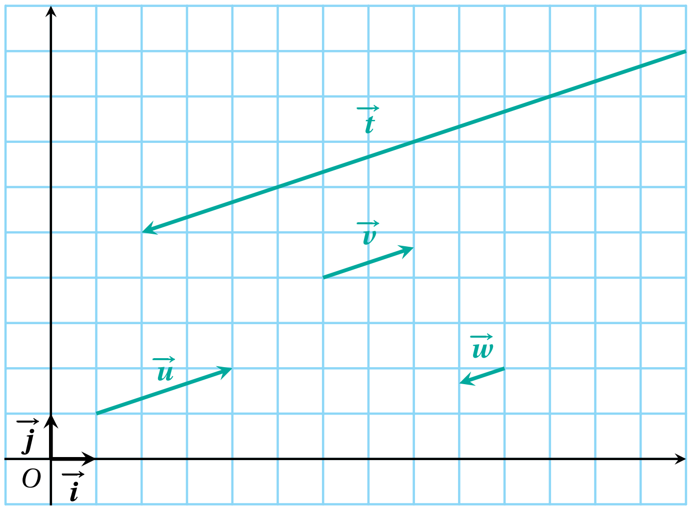
Soit $\mathscr{R}$ un repère $(O; I, J)$, que l'on peut noter maintenant $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, en posant $\overrightarrow{i}$ = ... et $\overrightarrow{j}$ = ...

Définition 8.

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur et k un nombre réel, le vecteur $k\overrightarrow{u}$ est le vecteur ayant pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

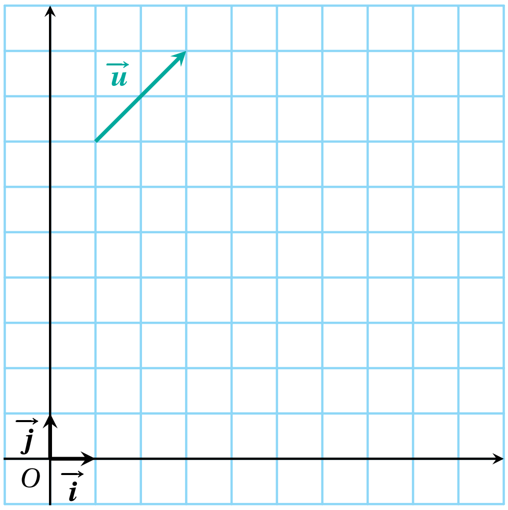
Exercice 10.

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{t}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$.



Exercice 11.

Construire les vecteurs $2\overrightarrow{u}$, $0,5\overrightarrow{u}$ et $-1,5\overrightarrow{u}$.



Définition 9.

On dit que deux vecteurs sont colinéaires si l'un est le produit de l'autre par un réel k.

Remarque 2
$\overrightarrow{0}$ *est colinéaire à tous les vecteurs.*

Propriété 10.

- A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- $(AB)//(CD)$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Propriété 11.

Condition de colinéarité.
Deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' = x'y$, ce qui équivaut à $xy' - x'y = 0$

Méthode 3.

vérifier la colinéarité de deux vecteur.

Pour vérifier que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, il suffit de :

possibilité 1 : trouver un réel λ non nul tel que $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$;

possibilité 2 : vérifier que les produits en croix, xy' et $x'y$, sont égaux.

Exercice 12.

Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$.
2. $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{z}\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$.