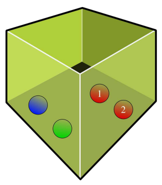
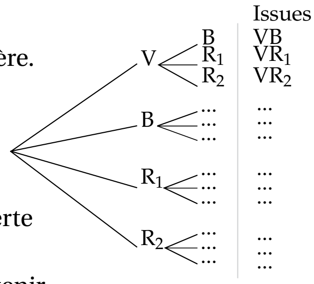
1 Activité



Une urne comprend une boule verte (V), une boule bleue (B) et deux boules rouges (R_1 et R_2).

On tire au hasard une boule, puis une deuxième sans avoir remis la première.



1. Recopier et compléter l'arbre ci-contre afin de déterminer toutes les issues possibles.
2. Quelle est la probabilité de chaque issue ?
3. Une boule bleue ne rapporte rien et ne fait rien perdre, une boule verte rapporte 2 points et chaque boule rouge fait perdre 1 point.
   On s'intéresse au gain algébrique X (positif ou négatif) que peut obtenir un joueur à ce jeu.

On définit ainsi une variable aléatoire réelle X.

   a. Quelles sont les valeurs possibles pour le gain ?

   b. Compléter le tableau.

Événement	$(X=-2)$	$(X=-1)$	$(X=1)$	$(X=2)$
Issues favorables				

   c. Calculer la probabilité, notée $P(X=-2)$, que le joueur perde 2 euros.

   d. Calculer de même $P(X=-1)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$.

   e. Compléter le tableau suivant :

Ce tableau donne la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	-2	-1	1	2
$P(X=x_i)$				

2 Variable aléatoire discrète

Définition 1.

Soit $\Omega = \{e_1; e_2; ...; e_m\}$ l'univers fini d'une expérience aléatoire.
Une **variable aléatoire** X sur Ω est une fonction qui, à chaque issue de Ω, associe un nombre réel.

Notation 1
x est un réel, l'événement « X prend la valeur x » est noté $(X=x)$, il est formé de toutes les issues de Ω ayant pour image x.

Définition 2 (Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète)**.**

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$. Lorsqu'à chaque valeur x_i, on associe la probabilité de l'événement $(X=x_i)$, on définit **la loi de probabilité** de X.

Remarque 1

La loi de probabilité d'une variable aléatoire se présente à l'aide d'un tableau.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

On a $P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_n) = 1$.

Méthode 1.

Étudier une variable aléatoire

Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

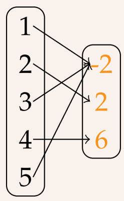
1. on détermine les valeurs x_i que peut prendre X ;
2. on calcule les probabilités $P(X = x_i)$;
3. on résume les résultats dans un tableau.

Une urne contient cinq jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 5.
Un joueur participe à la loterie en payant 2 €, ce qui lui donne le droit de prélever au hasard un jeton dans l'urne.

— Si le numéro est pair, il gagne en euros le double de la valeur indiquée par le jeton.

— Si le numéro est impair, il perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au «gain algébrique».
Déterminer la loi de probabilité de X.
Solution
L'univers est l'ensemble des 5 jetons.
Les cinq issues sont équiprobables.
Les jetons 1, 3 et 5 font perdre 2 euros ;
le jeton 2 fait gagner $2 \times 2 - 2 = 2$ euros ;
le jeton 4 fait gagner $4 \times 2 - 2 = 6$ euros.
X peut prendre les valeurs -2 ; 2 et 6.



L'événement $(X = -2)$ est réalisé pour les issues 1 ; 3 ; 5 donc $P(X = -2) = \dfrac{3}{5}$.

L'événement $(X = 2)$ est réalisé pour l'issue 2 donc $P(X = 2) = \dfrac{1}{5}$.

L'événement $(X = 6)$ est réalisé pour l'issue 4 donc $P(X = 6) = \dfrac{1}{5}$.

On présente la **loi de probabilité** de X dans un tableau.

x_i	-2	2	6
$P(X = x_i)$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

3 Espérance, variance et écart-type

Définition 3.

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1; x_2; ...; x_n$ avec les probabilités $p_1; p_2; ...; p_n$.

- On appelle **éspérance** de X le nombre : $E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.
- On appelle **variance** de X le nombre :
  $V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + ... + p_n (x_n - E(X))^2$
  $= \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$.
- On appelle **écart-type** de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

*Un jeu est **équitable** lorsque l'espérance du gain est nulle.*

Remarque 2

- *Le mot «espérance» vient du langage des jeux : lorsque X désigne le gain, $E(X)$ est le gain moyen que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties.*
- *Une autre formule de la variance est $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i {x_i}^2 - [E(X)]^2$.*

Méthode 2.

Utiliser la calculatrice
On souhaite calculer l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire.

- **Avec une TI**
  Appuyer sur STAT, puis menu EDIT, sélectionner 1 : Edite
  Entrer les valeurs x_i en liste L1 et les probabilités p_i en liste L2
  Pour afficher les paramètres, appuyer sur STAT, puis menu CALC, sélectionner 1 :Stats 1-Var, taper L1,L2, puis appuyer sur Entrer.
- **Avec une Casio**
  Sélectionner le menu 2 (STAT)
  Entrer les valeurs x_i dans List1 et les probabilités p_i dans List2.
  Sélectionner (F2) CALC puis (F6) SET, sélectionner 1 : Var Xlist (F1) List 1 et 1VarFreq (F2) List2. Appuyer sur EXIT (F1) 1Var.

On donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.
Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ avec une calculatrice.

x_i	-3	-1	2	5
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Réponses :

4 Répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire

*Une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possible est une épreuve de **Bernoulli**.*

On considère le cadre suivant : on répète 2 fois de suite, de manière **identique** et de façon **indépendante** la même expérience aléatoire ne comportant que deux issues possibles.

On dispose d'une urne contenant 100 boules : 40 boules rouges et 60 boules noires.

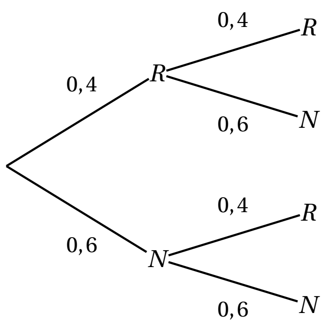
*Un **schéma de Bernoulli** consiste à répéter plusieurs fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante.*

On effectue deux tirages successifs avec remise dans cette urne en notant à chaque fois la couleur de la boule obtenue (donc deux issues possibles).

Comme ce sont des tirages avec remise :

- à chaque tirage, les conditions sont identiques (il y a 100 boules dans l'urne : 40 boules rouges et 60 boules noires) ;
- les tirages sont indépendants (le résultat d'un tirage n'influence pas le suivant).

À chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule rouge est de $\frac{40}{100} = 0,4$ et la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{60}{100} = 0,6$ donc on peut représenter la situation par l'arbre pondéré ci-contre.



Ne pas oublier le principe multiplicatif. Quand plusieurs chemins donnent le même nombre de boules rouges, on ajoute les probabilités des différents chemins.

*Ce tableau donne la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X.*

1. Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir une boules rouges.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir zéro boules rouges.
4. Soit X la variable aléatoire qui, lors de cette expérience aléatoire, prend pour valeur le nombre de boules rouges obtenues, compléter le tableau suivant :

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$			

5. Calculer l'espérance de X, sa variance ainsi que son écart-type.