Produit scalaire et applications

1. Définition et conséquences

Définition
On se place dans un repère orthonormé du plan.
Soient $\vec{u}\,(x;y)$ et $\vec{v}\,(x';y')$ deux vecteurs.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$$

Exemple : Avec $\vec{u}\,(1;2)$ et $\vec{v}\,(2;3)$,
on obtient $\vec{u}.\vec{v} = 2+6 = 8$.

Remarques

- $\vec{u}.\vec{u} = x^2 + y^2 = ||\vec{u}||^2$, on notera parfois

$$||\vec{u}||^2 = \vec{u}^2$$

- Si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul alors le produit scalaire est nul. Cependant la réciproque est fausse $\vec{u}.\vec{v} = 0$ n'implique pas nécessairement que $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ soit le vecteur nul.
  Exemple : avec $\vec{i}\,(1;0)$ et $\vec{j}\,(0;1)$ on a $\vec{i}.\vec{j} = 0$ et pourtant ni $\vec{i}$ ni $\vec{j}$ ne sont le vecteur nul.

Lien avec la norme :

Théorème.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on a l'égalité suivante :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$$

Démonstration :
Dans un repère orthonormé on considère les vecteurs $\vec{u}\,(x;y)$ et $\vec{v}\,(x';y')$.
On a :

- $||\vec{u}||^2 = x^2 + y^2$
- $||\vec{v}||^2 = x'^2 + y'^2$
- $||\vec{u}+\vec{v}||^2 = (x+x')^2 + (y+y')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2$

d'où $\frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right) = xx' + yy' = \vec{u}.\vec{v}$.

Théorème

Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est indépendant du repère choisi.

Autres expressions du produit scalaire

On peut définir de plusieurs manières le produit scalaire, selon le contexte on utilisera l'une de ces expressions.
Définitions équivalentes

a. $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2\right)$.

b. $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v})$

c. Soit O, A et B trois points du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA).
$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

Démonstration :
Supposons que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ et posons $\vec{i} = \frac{\vec{u}}{||\vec{v}||}$.
Soit $\vec{j}$ le vecteur tel que : $(\vec{i},\vec{j}) = \frac{\pi}{2}$ et $||\vec{v}|| = 1$ ainsi le repère est repère orthonormé direct.
Dans ce repère on a $\vec{u} = (||\vec{u}||;0)$ et $\vec{v} = (||\vec{v}||\cos\theta; ||\vec{v}||\sin\theta)$ avec $\theta = (\vec{u},\vec{v})$ d'où :
$\vec{u}.\vec{v} =$ ce qui démontre (2).
Si on considère $\vec{v'}$ le projeté orthogonal de $\vec{v}$ sur la direction donnée par $\vec{u}$ on a $\vec{v} = (||\vec{v}||\cos\theta;0)$ d'où :
$\vec{u}.\vec{v'} = ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \times \cos(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v}$ ce qui démontre (3).

Propriétés du produit scalaire

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs et λ est un réel.

- Commutativité : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- Linéarité : $(\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda\vec{u}.\vec{v}$
- Distributivité : $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
  on a aussi : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

Identités remarquables :

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$
$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Inégalités

$$-||\vec{u}|| \times ||\vec{v}|| \leq \vec{u}.\vec{v} \leq ||\vec{u}|| \times ||\vec{v}||$$

$$||\vec{u}+\vec{v}|| \leq ||\vec{v}|| + ||\vec{v}||$$

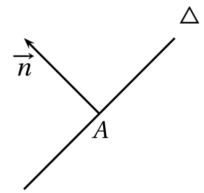
Orthogonalité

Deux vecteurs non-nuls sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

2. Applications du produit scalaire

Équation d'une droite à l'aide d'un vecteur normal
Dans un repère orthonormé on cherche à déterminer une équation de la droite $\triangle$ dont la direction est orthogonal au vecteur $\vec{n}\,(a;b)$ non-nul passant par le point $A(x_A;y_A)$.

$M(x;y)$ appartient à la droite $\triangle$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
On a donc une équation de la droite $\triangle$:
$(x-x_A) \times a + (y-y_A) \times b = 0$.



Application :
Dans un RON , soient les points $A(2;1)$, $B(0;1)$ et $C(1;3)$.
Déterminer une équation de la droite d passant par le point A et perpendiculaire à la droite (BC)

Équation d'un cercle

Dans un repère orthonormé , on cherche à déterminer une équation d'un cercle $\mathscr{C}$ dans les deux cas suivants.

Défini par son centre et son rayon :

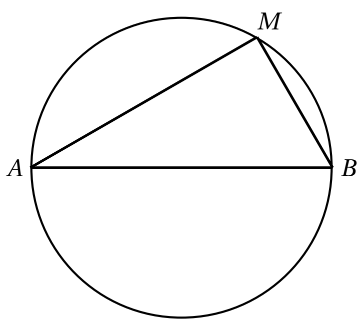
Soit le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(x_0; y_0)$ et de rayon $r > 0$.
$M(x; y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $\Omega M^2 = r^2$

on a donc une équation du cercle $\mathscr{C}$:
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Défini par son diamètre :

Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts du plan et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$.
$M(x; y)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

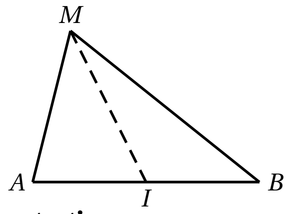
on a donc une équation du cercle $\mathscr{C}$:
$(x - x_A) \times (x - x_B) + (y - y_A) \times (y - y_B) = 0$.



Théorème de la médiane

Soient MAB un triangle et I le milieu du segment $[AB]$ on a :

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$
- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$



Démonstration :

a.

$$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$$
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + IA^2 + IA^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}$$
$$+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$$
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})$$
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

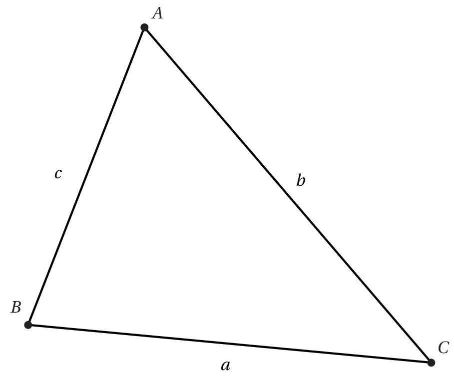
b.

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$$
$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}$$
$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{BI})$$
$$MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA}$$

c.

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})$$
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})$$
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$$

Dans un triangle ABC, on notera :$a = BC$; $b = AC$; $c = AB$, $\widehat{ABC} = \widehat{B}$; $\widehat{BAC} = \widehat{A}$; $\widehat{ACB} = \widehat{C}$



Théorème d'Al-Kashi

Dans un triangle quelconque ABC :
$b^2 = a^2 + c^2 - 2accos(\widehat{B})$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\widehat{C})$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(\widehat{A})$

Formule des aires

Dans un triangle ABC non aplati, si on note S l'aire du triangle ABC, on a :

$$S = \frac{1}{2}bcsin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}acsin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}absin(\widehat{C})$$

Formule des sinus

Pour tout triangle ABC non aplati, on a :

$$\frac{a}{sin(\widehat{A})} = \frac{b}{sin(\widehat{B})} = \frac{c}{sin(\widehat{C})}$$