Pour aller plus loin...

Factorisation de polynômes de degré 3

Théorème (admis)
Si un polynôme P de degré 3 admet une racine réelle α , alors ce polynôme est factorisable par $(x-\alpha)$.

on a alors : $\boxed{P(x) = (x-\alpha)\times Q(x) \text{ où } Q(x) \text{ est un polynôme de degré 2.}}$

Utilisation : Le polynôme $P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$ admet comme racine évidente le nombre 1.
On peut donc le factoriser par $(x-1)$, ainsi, on sait qu'il existe un polynôme Q de degré 2 tel que, pour tout réel x, $P(x) = (x-1)\times Q(x)$.

Détermination du polynôme Q.

Première méthode : identification des coefficients.

Cette méthode utilise le théorème suivant :

Théorème (admis)
Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les mêmes coefficients.

Comme Q est un polynôme de degré 2, il s'écrit sous la forme $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
On a donc, $(x-1)\times Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$.
On en déduit que :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -4 \\ c - b = -7 \\ -c = 10 \end{cases} \quad \text{donc que} \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -10 \end{cases}$$

Le polynôme P s'écrit donc : $P(x) = (x-1)(x^2 - 3x - 10)$.

Exercice : finir de factoriser P.

Deuxième méthode : division euclidienne de polynômes.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^3 & - & 4x^2 & - & 7x & + & 10 & x-1 \\ \cline{8-8}
X^3 & - & x^2 & & & & & \\ \cline{1-7}
 & - & 3x^2 & - & 7x & + & 10 & x^2-3x-10 \\
 & - & 3x^2 & + & 3x & & & \\ \cline{2-7}
 & & & - & 10x & + & 10 & \\
 & & & - & 10x & + & 10 & \\ \cline{4-7}
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

NB : ces méthodes fonctionnent avec des polynômes de degré supérieur à 3.

Exercice 1 : factorisez au maximum les polynômes suivants :

1. $P(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$.
2. $P(x) = x^3 - x^2 - x - 2$.

Exercice 2 : résoudre l'équation $x^2 - 3x + \dfrac{5}{2} = \dfrac{1}{x+1}$.