1 Expérience aléatoire

Définition 1.

On appelle expérience aléatoire une expérience liée au hasard, dont les résultats sont connus, mais dont on ne sait pas à l'avance lequel de ces résultats va survenir.

Exemple 1.

On lance une pièce de monnaie. On sait que la pièce va tomber sur Pile ou Face, mais on ne sait pas quel résultat on va obtenir en lançant la pièce.

2 Univers et éventualités

Définition 2.

- Lors d'une expérience aléatoire, on appelle **univers**, noté Ω, l'ensemble des résultats possibles, que l'on appelle **éventualités** ou **issues**.
- Les sous-ensembles de Ω sont appelés **événements**.
- Un événement **élémentaire** ne contient qu'un élément.
- Ω est l'événement **certain**.
- L'ensemble vide, $\emptyset$, est l'événement **impossible**.

Exemple 2.

On lance un dé et on note le résultat de la face supérieure.
L'univers est : $\boxed{\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}}$

- « Obtenir un résultat pair » est un événement, constitué des trois éventualités :$\{2 ; 4 ; 6\}$.
- « Obtenir un entier strictement inférieur à 2 » est un événement élémentaire car il n'est constitué que d'une éventualité : $\{1\}$.
- « Obtenir un multiple de 10 » est l'événement impossible $\emptyset$.

Exercice 1.

Par temps de pluie, trois amies entrent dans un magasin et déposent leur parapluie dans la corbeille prévue à cet effet.
En sortant du magasin, il n'y a que ces trois parapluies dans la corbeille, chacune d'elle en prend un au hasard.
L'événement « Seules deux d'entre elles ont le bon parapluie » est l'événement impossible. Expliquez pourquoi.

Correction ▼

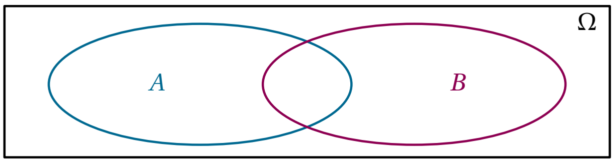
3 Intersection, réunion

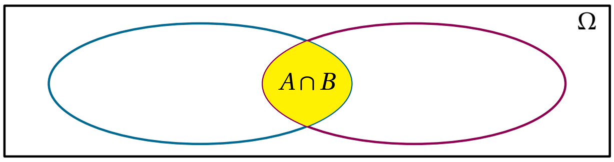
Définition 3.

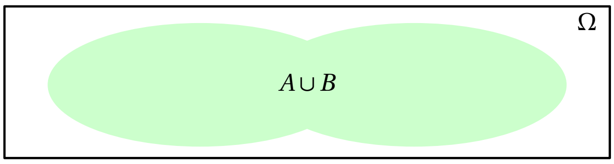
Soient deux événements A et B.

- On note A ∩ B l'intersection de A et de B, constituée des éventualités appartenant à A **et** à B.
- On note A ∪ B la réunion de A et de B, constituée des éventualités appartenant à A **ou** à B (au sens inclusif).

Un diagramme de Venn permet de représenter les différents événements.







Exercice 2.

On lance un dé à six faces, décrire les événements suivants.

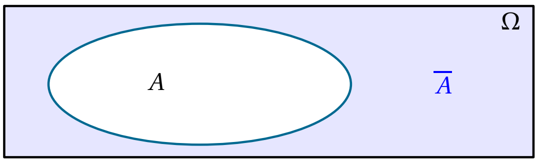
1. A : « Obtenir un nombre pair ».
2. B : « Obtenir un multiple de 3 ».
3. $A \cup B$
4. $A \cap B$

Correction ▼

4 Événement contraire

Définition 4.

On appelle événement contraire de A, noté $\overline{\text{A}}$, l'ensemble des éventualités de Ω qui ne sont pas dans A.



Exemple 3.

On tire au hasard une pièce d'un échiquier. Soit C l'événement : « la pièce est une tour ou elle est blanche ». L'événement $\overline{C}$ est : « la pièce est ni une tour, ni blanche ».

Exercice 3.

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.
On appelle :

- C l'événement « la carte tirée est un cœur »
- F l'événement « la carte tirée est une figure »

1. Décrire par une phrase l'événement $C \cap F$.
   Combien compte-t-il d'issues ?
2. Décrire par une phrase l'événement $C \cup F$.
   Combien compte-t-il d'issues ?
3. Décrire par une phrase l'événement $\overline{C} \cap F$.
   Combien compte-t-il d'issues ?
4. Décrire par une phrase l'événement $\overline{C \cup F}$.
   Combien compte-t-il d'issues ?

Correction ▼

5 Probabilités

Définition 5.

Soit $\Omega = \{a_1\ ;\ a_2\ ;\ \cdots a_n\}$ l'univers associé à une expérience aléatoire.

On définit une **loi de probabilité** sur Ω en choisissant des nombres p_1, p_2, ... p_n tous compris entre 0 et 1, tels que $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

p_i est la probabilité de l'événement élémentaire a_i.

La loi de probabilité se présente à l'aide d'un tableau.

Événements	a_1	a_2	...	a_n
Probabilités	p_1	p_2	...	p_n

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Remarque 1
Si l'on effectue une expérience aléatoire n fois de suite dans les mêmes conditions, la fréquence de réalisation d'un événement se stabilise lorsque n devient très grand et se rapproche d'un nombre fixe.
Comme modèle probabiliste, on prend comme probabilité pour chaque événement la limite des fréquences.

Définition 6.

On dit qu'on est dans une situation d'équiprobabilité si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Propriété 1.

Si l'on est dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est :
$p(A) = \dfrac{\text{Nombre d'éléments de} A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega}$.

Exemple 4.

1. On lance un dé cubique non truqué, on est alors dans un cas d'équiprobabilité.
   Chaque événement élémentaire a une probabilité de $\dfrac{1}{6}$.

   La probabilité d'obtenir un résultat pair est $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2}$.
2. une classe de 35 élèves comprend 20 filles.

   On choisit un élève au hasard et on note F l'événement « l'élève choisi est une fille ». On est dans un cas d'équiprobabilité. $p(F) = \dfrac{20}{35} = \dfrac{4}{7}$.

6 Propriétés

Propriété 2.

- Pour tout événement A : $0 \leqslant p(\mathrm{A}) \leqslant 1$
- $p(\Omega) = 1$; $p(\emptyset) = 0$
- Pour deux événements A et B : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
- Si A et B sont incompatibles, c'est-à-dire si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$: $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$.
- $p\left(\overline{\mathrm{A}}\right) = 1 - p(\mathrm{A})$

Exercice 4.

1. On considère deux événements A et B tels que :

a. $p(A) = 0,6$ **b.** $p(B) = 0,5$ **c.** $p(A \cap B) = 0,3$

Calculer $p(A \cup B)$

2. On considère deux événements A et B tels que :

a. $p(A) = 0,7$ **b.** $p(B) = 0,5$ **c.** $p(A \cup B) = 0,9$

Calculer $p(A \cap B)$.

3. On considère deux événements A et B tels que :

a. $p(A) = 0,5$ **b.** $p(B) = 0,8$ **c.** $p(A \cap B) = 0,4$

Calculer $p\left(\overline{A \cup B}\right)$

Correction ▼

7 Exercices

Exercice 5.

Une étude portant sur un échantillon de 10000 personnes a permis d'établir que 43% des personnes sont du groupe sanguin O, 45% sont du groupe A, 9% sont du groupe B et 3% sont du groupe AB.
Par ailleurs :

- pour le groupe O, 86% ont un rhésus positif;
- pour le groupe A, 87% ont un rhésus positif;
- pour le groupe B, 78% ont un rhésus positif;
- pour le groupe AB, 67% ont un rhésus positif.

On choisit une personne au hasard dans cet échantillon et on considère :

- O l'évènement « la personne est du groupe O », et on définit de même les évènements A, B et AB;
- $R+$ l'évènement « la personne a un rhésus positif » et on définit de même l'évènement $R-$.

1. Compléter le tableau suivant :

	A	B	O	AB	Total
$R+$					
$R-$					
Total					

2. D'après ces données, quelles sont les probabilités des événements suivants :

   a. $P(O)$?　　**b.** $P(B)$?

3. Calculer $P(R+)$, en déduire $P(R-)$.
4. Décrire l'évènement $O \cap R+$ par une phrase et en calculer sa probabilité.
5. Décrire l'évènement $AB \cup R-$ par une phrase et calculer sa probabilité.

Correction ▼

Exercice 6.

Représenter une situation à l'aide d'un arbre pondéré
Sur l'étal d'un maraîcher, il y a 3/4 de légumes rouges et le reste de légumes verts.

- Parmi les légumes rouges 30% sont des poivrons et 70% sont des tomates.
- Parmi les légumes verts 80% sont des poivrons et 20% sont des tomates.

On choisit un légume au hasard sur l'étal et on considère les évènements :

- A : « le légume choisi est une tomate » ;
- R : « le légume choisi est Rouge » ;
- V : « le légume choisi est Vert ».

1. Représenter la situation par un arbre.
2. Calculer $P(R \cap A)$.
3. Calculer $P(V \cap A)$
4. En déduire $P(A)$

Correction ▼

Correction de l’exercice 1 Retour ▲

Si deux personnes ont le bon parapluie, alors la troisième a également le bon. (D’après le jeu "Professeur Layton").

Correction de l'exercice 2 Retour ▲

1. $A = \{2; 4; 6\}$
2. $B = \{3; 6\}$
3. $A \cup B = \{2; 3; 4; 6\}$
4. $A \cap B = \{6\}$

Correction de l'exercice 3 Retour ▲

1. $C \cap F$: « la carte tirée est une figure à cœur. »
   Il a 3 éventualités (valet, dame et roi de cœur).
2. $C \cup F$: « la carte tirée est un cœur ou une figure »
   Il a 17 éventualités $(8+12-3=17)$.
3. $\overline{C} \cap F$: « la carte tirée est une figure mais pas à cœur »
   il a 9 éventualités.
4. $\overline{C \cup F}$: « la carte tirée n'est ni un cœur, ni une figure »
   Il a 15 éventualités $(32-17=15)$.

Correction de l'exercice 4 Retour ▲

1. $p(A\cup B)=0,6+0,5-0,3=0,8$
2. $p(A\cap B)=0,7+0,5-0,9=0,3$
3. On a $p(A\cup B)=0,5+0,8-0,4=0,9$, donc $p\left(\overline{A\cup B}\right)=1-0,9=0,1$

Correction de l'exercice 5 Retour ▲

1. Compléter le tableau suivant :
   On calcule 43% de 10000, donc 4300 personnes de cet échantillon sont du groupe O, on fait de même pour les autres groupes.
   On calcule ensuite 86% de 4300, donc, parmi les personnes de groupe O, il y a 3698 personnes qui ont le rhésus positif, on fait de même pour les autres groupes.

	A	B	O	AB	Total
$R+$	3915	702	3698	201	8516
$R-$	585	198	602	99	1484
Total	4500	900	4300	300	10000

2. D'après ces données, quelles sont les probabilités des événements suivants :

   a. $P(O) = 0,43$ **b.** $P(B) = 0,09$

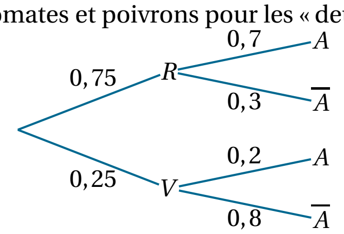
3. $P(R+) = \dfrac{8516}{10000} = 0,8516$, $P(R-) = 1 - 0,8516 = 0,1484$.
4. L'évènement $O \cap R+$ correspond à « la personne est du groupe O et de rhésus positif ». $P(O \cap R+) = \dfrac{3698}{10000} = 0,3698$.
5. L'évènement $AB \cup R-$ correspond à « la personne est du groupe AB et de rhésus négatif ». $P(AB \cup R-) = \dfrac{300 + 1484 - 99}{10000} = 0,1685$

Correction de l'exercice 6 Retour ▲

1. Pour le premier nœud, les deux possibilités sont R : « le légume choisi est rouge » et son évènement contraire $\overline{R} = V$: « le légume choisi est vert ».

__Règle des nœuds__ : la somme des probabilités des branches issues d'une même nœud est égale à 1.

Il reste ensuite à distinguer tomates et poivrons pour les « deuxièmes nœuds » :



Comme l'évènement « le légume choisi est un poivron » n'est pas nommé par une lettre, on a utilisé $\overline{A}$ pour le représenter dans l'arbre mais on aurait aussi pu introduire une nouvelle notation.

Quand on parcourt les branches d'un arbres, le principe est __multiplicatif__.

2. $P(R \cap A) = 0,75 \times 0,7 = 0,525$.
3. $P(V \cap A) = 0,25 \times 0,2 = 0,05$.
4. $P(A) = 0525 + 0,05 = 0,575$

Comme R et V sont disjoints et d'union égale à l'univers, on dit qu'ils forment une partition de l'univers, ainsi : $P(A) = P(R \cap A) + P(V \cap A)$, ceci se généralise à plus de deux événements.