Définition 1.

Soit $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres réels. Définir une **fonction** f sur $\mathscr{D}$ revient à associer à chaque réel x de $\mathscr{D}$, un réel *et un seul*, appelé **image** de x par la fonction f.

L'ensemble $\mathscr{D}$ est l'**ensemble de définition** de f.

L'**image** de x par f est notée $f(x)$.

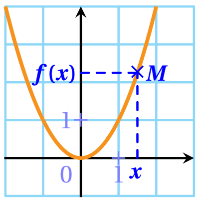
Si b est l'image de a par la fonction f, (c'est à dire $f\,a) = b$), on dit que a est **un antécédent** de b par f.

La variable d'une fonction n'est pas toujours notée x, et la fonction n'est pas toujours notée f ! Ici on note :

Exemple 1.

Reprenons l'activité d'introduction du cours.
Dans la partie A :
la réponse donnée dans la question 1 est ....,
la réponse donnée à la question 2 est ....,
les réponses données à la question 3 sont ....

Dans la partie A, la fonction a été définie à l'aide d'une **Courbe**.

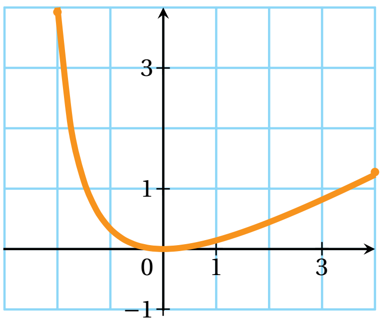


Définition 2.

Soit f une fonction et $\mathscr{D}$ son ensemble de définition. La **représentation graphique** de f dans un repère $(O; I, J)$ est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ où x décrit l'ensemble $\mathscr{D}$.

Méthode 1.

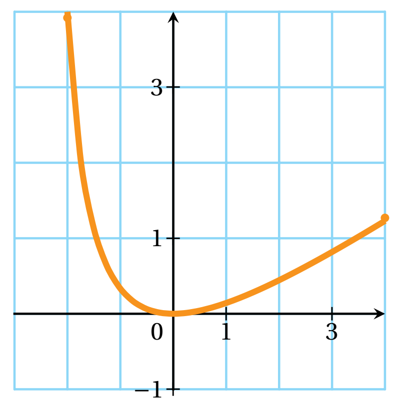
lire graphiquement l'image d'un nombre.
Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2; 4]$. Lecture de l'image de 2 par f.



On repère .... sur l'axe des abscisses, puis on trace en pointillés la "verticale" qui passe par .....
Celle-ci coupe la courbe en un point A, on lit l'ordonnée de ce point en traçant "l'horizontale" qui passe par A, on obtient l'image de .... par f.
Ici l'image de .... par f vaut environ ....., ce que l'on note $f(...) \approx$ .....

Méthode 2.

lire graphiquement des antécédents.
On garde la même fonction. On cherche, s'ils existent, les antécédents de 3, de 1 et de -1 par f.



On repère le nombre souhaité sur l'axe des ordonnées, puis on trace en pointillés la "l'horizontale" qui passe par celui-ci.
Si celle-ci coupe la courbe, les abscisses des points d'intersection sont les antécédents de ce nombre.
Ici 3 a .... antécédent par f qui vaut environ ......
1 a ..... antécédents par f, ... et ....
-1 .... par f.

Définition 3.

Soit f une fonction, $\mathscr{D}$ son ensemble de définition et $x \in \mathscr{D}$. L'**expression algébrique** d'une fonction donne directement, $f(x)$ en fonction de la variable x.

Exemple 2.

Dans la partie B de l'activité, l'image d'un réel t de l'intervalle $[0;25]$ par la fonction p a été donnée par ....

Exercice 1.

Une fonction est déterminée par le programme de calcul suivant :
- choisir un nombre ;
- lui ôter 6 ;
- prendre le carré du résultat.

On note g la fonction qui à un nombre x, lui associe le résultat du programme de calcul.
Après avoir choisi un nombre x, le programme lui ôte 6, on obtient donc ....

Ensuite le programme élève ce nombre au carré soit : ....

Donc la fonction liée à ce programme de calcul est définie par : $g(x) =$ ....

Méthode 3.

Déterminer l'image d'un nombre par le calcul.

Considérons la fonction de l'exercice ci-dessus, qui est définie sur $\mathbb{R}$.

Pour calculer l'image de 5 par g, on remplace x par 5 dans la formule,

on obtient donc $g(5) =$ .... = ... = ...

L'image de 5 par g est donc égale à ......

Méthode 4.

Déterminer les éventuels antécédents d'un nombre par le calcul.

Déterminons les éventuels antécédents de 16 par cette même fonction g.

On cherche donc s'il existe des réels x tels que $g(x) = 16$,

c'est-à-dire tels que .... = 16.

Or, les seuls nombres dont le carré vaut 16 sont .... et ....

Cette équation équivaut donc à .... ou ...., c'est-à-dire à $x = 10$ ou $x = 2$.

Les antécédents de 16 par g sont donc .... et ....

Propriété.

On utilisera très souvent le résultat suivant, l'équation $x^2 = k$ admet :

$$\begin{cases} \textbf{deux} \text{ solutions si } \mathbf{k>0}, \ \sqrt{k} \text{ et } -\sqrt{k} \\ \textbf{une} \text{ solution si } \mathbf{k=0}, \text{ c'est } 0 \\ \textbf{aucune} \text{ solution réelle si } \mathbf{k<0}. \end{cases}$$

Exercice 2.

Déterminer les éventuels antécédents de 0 par g.

Déterminer les antécédents de -1 par g.

$\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres réels privé de 0

Définition 4.

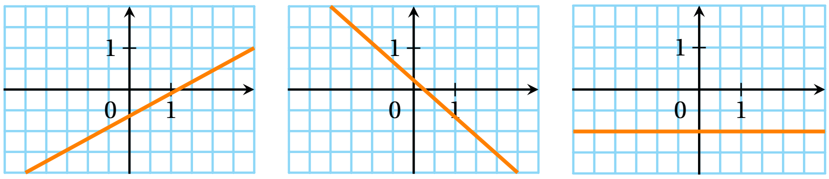
Une **fonction de référence** est une fonction simple qui permet l'étude d'une famille plus large de fonctions.

- Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $mx + p$ (avec m et p réels).
- La **fonction carrée** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe x^2.
- La **fonction inverse** est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ qui à tout $x \neq 0$ associe $\frac{1}{x}$.

Représentation graphique des fonctions de référence.

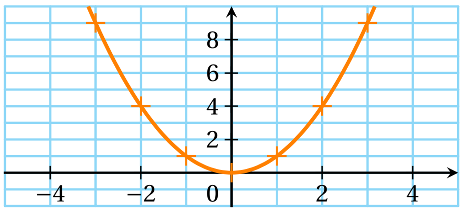
- ### Fonction affine

Si $m > 0$ Si $m < 0$ Si $m = 0$



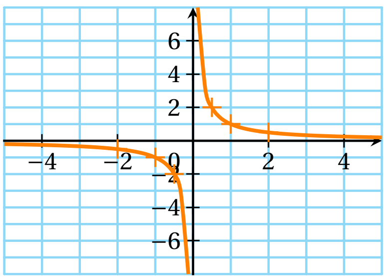
La représentation graphique d'une fonction affine est une **droite**.

- ### Fonction carrée



La représentation graphique de la fonction carrée est une **parabole**.

- ### Fonction inverse



La représentation graphique de la fonction inverse est une **hyperbole**.