Les mathématiciens grecs de l'antiquité utilisaient la règle (non graduée) et le compas comme seuls instruments de constructions géométriques.

1 Géométrie

Décrivez ci-dessous vos constructions :

Sur la **figure 1** ci-dessous, on a placé deux points A et B. Construire la médiatrice du segment $[AB]$.

Définition 1.

La médiatrice d'un segment est

Méthode 1.

En utilisant ce qui précède, vous pourrez donc maintenant construire le milieu d'un segment donné et une droite perpendiculaire à une droite donnée.

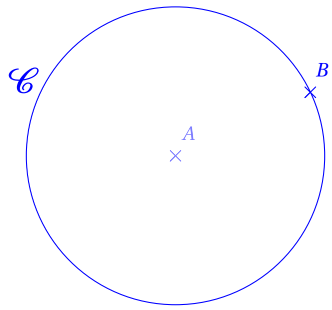
Construire sur la **figure 1** la perpendiculaire à la droite (AB) passant par C.

Méthode 2.

En utilisant ce qui précède, vous pourrez donc maintenant construire une droite perpendiculaire à un droite donnée passant par un point donné.

Exercice 1.

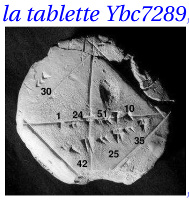
Sur la figure ci-dessous, construire la tangente au cercle $\mathscr{C}$ en B :



Sur la **figure 2** ci-dessous, on a placé deux points A et B. Construire un carré $ABCD$.

Décrivez ci-dessous vos constructions :

Ce résultat était déjà connu des Babyloniens comme l'atteste la tablette Ybc7289,



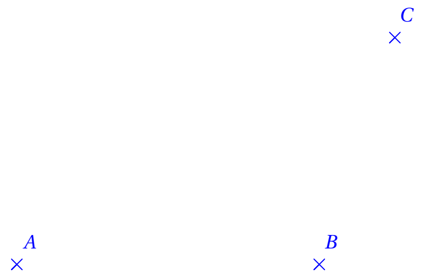
, pour en savoir plus, consultez cette page.

Si l'on note a la distance AB, que vaut la distance AC ?

Quel est le rapport entre les longueurs d'une diagonale et d'un côté d'un carré ?

Décrivez ci-dessous vos constructions :

Sur la **figure 3** ci-dessous, on a placé trois points A ,B et C. Construire le parallélogramme $ABCD$

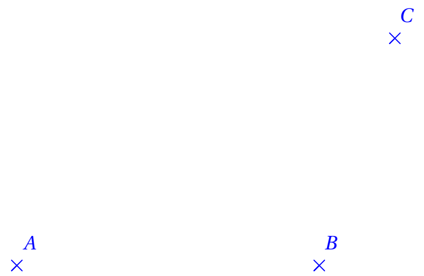


Méthode 3.

En utilisant ce qui précède, vous pourrez donc maintenant construire une droite parallèle à un droite donnée et passant par un point donné.

Décrivez ci-dessous vos constructions :

Sur la **figure 4** ci-dessous, on a placé trois points A ,B et C. Construire la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$.

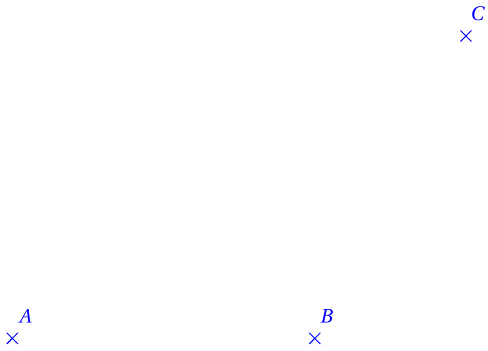


Définition 2.

La bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ est

Sur la **figure 5** ci-dessous, on a placé trois points A ,B et C. Construire les droites remarquables du triangle ABC.

Décrivez ci-dessous vos constructions :



Définition 3.

Rappeler la définition d'une hauteur et d'une médiane :

Propriété.

Dans un triangle ABC :
les médianes sont concourantes en un point appelé le centre de .... du triangle ABC
les hauteurs sont concourantes en un point appelé .... du triangle ABC,
les médiatrices sont concourantes en un point appelé le .... au triangle ABC
et les bissectrices sont concourantes en un point appelé le .... dans le triangle ABC.

2 Construction de nombres à la règle et au compas

Choisissons deux points O et I. On peut ainsi tracer la droite (OI) et la munir du repère (O,I) qui nous donnera, une origine O d'abscisse 0, une unité de longueur $OI = 1$ et un sens positif, de O vers I. Chaque point de cette droite correspondra donc à un nombre appelé son abscisse.
Faire une figure.

A l'aide de quel instrument peut-on construire les nombres 2, 3, 4, etc... ?
On peut donc construire tous les **entiers naturels** dont l'ensemble est noté $\mathbb{N}$,
on note $\mathbb{N} = \{0;1;2;3;...\}$.

A l'aide de quel instrument peut-on construire les nombres -1, -2, -3, -4, etc... ?
Les nombres $\dots -4$, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4..... sont appelés les **entiers relatifs**. Leur ensemble se note $\mathbb{Z}$ Ainsi on a $\mathbb{Z} = \{...;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4...\}$.

Remarque 1
Tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont aussi des éléments de $\mathbb{Z}$. On dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ et on note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. (On dit aussi que $\mathbb{N}$ est un sous-ensemble ou une partie de $\mathbb{Z}$)

Construction du nombre $\frac{1}{2}$:

Première méthode : construire la médiatrice du segment $[OI]$. Si l'on note Ale point d'intersection de cette médiatrice et du segment $[OI]$, quelle est l'abscisse de A ?

Deuxième méthode : tracer la perpendiculaire à (OI) passant par O. Placer sur cette droite un point Jtel que $OJ = OI$. (Il y en a deux mais pour plus de commodité, on choisira celui situé vers le haut). On obtient ainsi un repère orthonormé du plan.

Placer sur l'axe (OJ) le point B d'ordonnée 2. Tracer la parallèle à (BI) passant par J. Cette droite coupe (OI) en quel point ?

Construire de même les nombres $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.

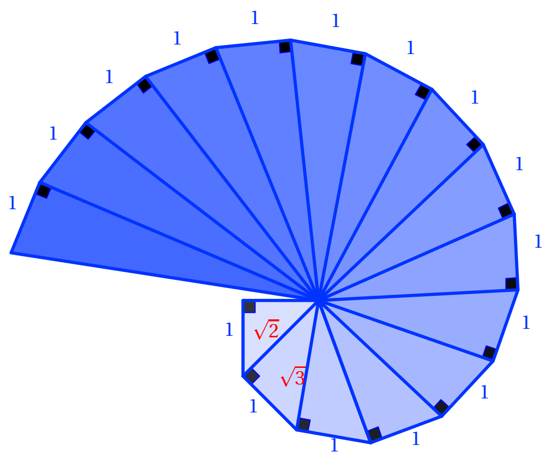
On peut, en utilisant cette méthode, construire tous les nombres de la forme $\frac{1}{n}$, où n est un entier relatif, et par suite, tous les nombres de la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs, avec $q \neq 0$. Ces nombres sont appelés les **nombres rationnels**. Leur ensemble est noté $\mathbb{Q}$.

Remarque 2
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

D'autres nombres constructibles à la règle et au compas ne sont pas rationnels. Par exemple, on peut citer le nombre $\sqrt{2}$. (Voir la construction plus haut)

Peut-on construire à la règle et au compas le nombre $\sqrt{3}$? Si oui, le construire en expliquant votre démarche.

Par une spirale, on peut donc construire les nombre de la forme $\sqrt{n}$ où n est un entier naturel.



Les **nombres réels** sont tous les nombres que vous connaissez, leur ensemble est noté $\mathbb{R}$

Remarque 3
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

La question de savoir si tous les nombres sont constructibles à la règle et au compas a fait l'objet de nombreuses recherches en Mathématiques, (depuis l'antiquité) et il a été prouvé, par exemple, que le nombre π n'est pas constructible à la règle et au compas. (Ce problème a donné lieu à une expression qui signifie l'impossibilité de résoudre un problème : « la quadrature du cercle. ») .