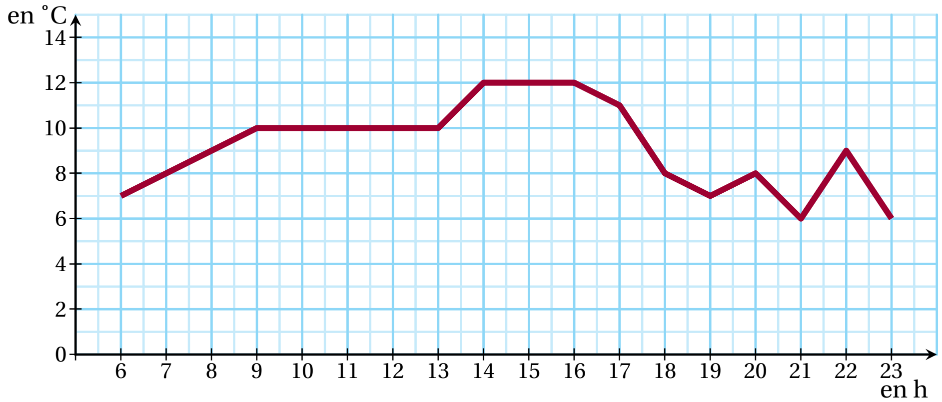
Variations et extrema

Activité

En Bretagne, il fait beau... plusieurs fois par jour ! (Disent les Bretons...)

Aurore a un capteur qui relève les températures en continu.

Voici ce qu'elle a obtenu dans son jardin de Saint-Brieuc le lundi 30 décembre 2013.



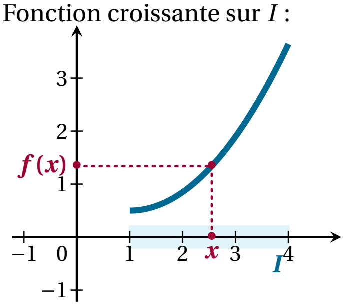
1. Donner la température à 9 h et à 17 h.
2. À quelle(s) heure(s) atteint-on
   a. la température de 8°C ?
   b. La température minimale ?
   c. La température maximale ?
3. Sur quelle(s) tranche(s) horaire(s)
   a. la température croît-elle ? Décroît-elle ?
   b. La température reste-t-elle constante ?
4. Décrire les variations de la température en fonction du temps.

1 Fonction croissante, décroissante, constante

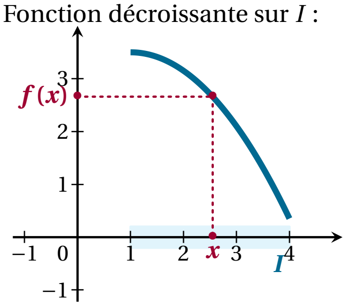
Première définition :

- On dit que f est **croissante** sur un intervalle I lorsque :
  si x augmente sur I alors $f(x)$ augmente.
- On dit que f est **décroissante** sur un intervalle I lorsque :
  si x augmente sur I alors $f(x)$ diminue.
- On dit que f est **constante** sur un intervalle I lorsque :
  pour tout réel x de l'intervalle I, $f(x) = c$ où c est une constante.
- Une fonction **qui ne change pas de sens de variations** sur un intervalle est dite **monotone** sur cet intervalle.

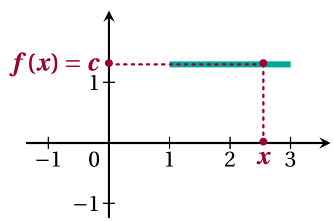
Fonction croissante sur I :



Fonction décroissante sur I :



Fonction constante sur I :



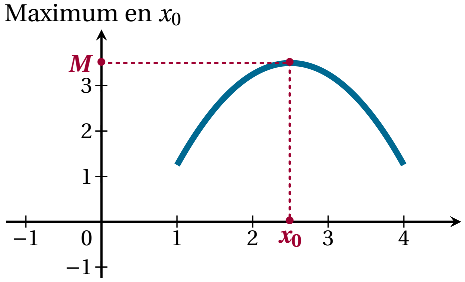
2 Maximum et minimum d'une fonction

Première définition

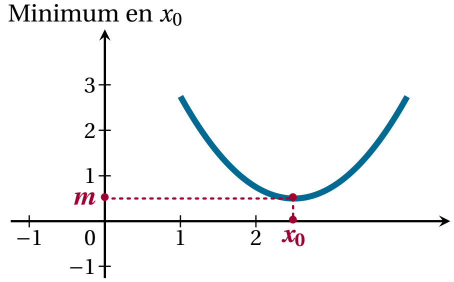
Sur un intervalle I,

- le **maximum** d'une fonction f, si il existe, est la plus grande des valeurs prises par $f(x)$;
- le **minimum** d'une fonction f, si il existe, est la plus petite des valeurs prises par $f(x)$.

Maximum en x_0



Minimum en x_0



3 Tableau de variations

Définition

Un **tableau de variations** regroupe toutes les informations concernant les variations d'une fonction sur son domaine de définition.

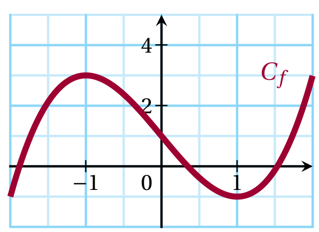
Méthode

Un tableau de variations comporte deux lignes.

- Aux extrémités de la 1ᵉ ligne, on trouve les **bornes** du domaine de définition de la fonction. Entre les bornes, on place d'**éventuelles** valeurs particulières.
- Le sens de variation de la fonction est indiqué sur la 2ᵉ ligne par **une ou plusieurs flèches** sur les intervalles où elle est monotone : ↗ pour croissante et ↘ pour décroissante.
- Les valeurs pour lesquelles la fonction **n'est pas définie** sont indiquées par une double barre verticale sur la deuxième ligne.
- On indique **au bout des flèches** les images des valeurs de la 1ʳᵉ ligne.

Exemple :

Le tableau de variations de la fonction définie sur $[-2;2]$ par la courbe ci-dessous.



est :

x	-2		-1		1		2
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-1	↗	3

4 Tableau de variations des fonctions usuelles

Propriété

- Le sens de variation de la fonction affine dépend du signe de a.
- La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- La fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}^{-}$ et croissante sur $\mathbb{R}^{+}$. Elle admet, sur $\mathbb{R}$, un minimum en 0.

Voici les tableaux de variations de ces fonctions :

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$ avec $a>0$	$\nearrow$	

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax+b$ avec $a<0$	$\searrow$	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$\searrow$	0	$\nearrow$

NB : la double barre en dessous de zéro dans le tableau de variations de la fonction inverse signifie que 0 est une valeur interdite pour cette fonction, cela se traduit par le fait que 0 n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction inverse.

5 Définitions plus précises

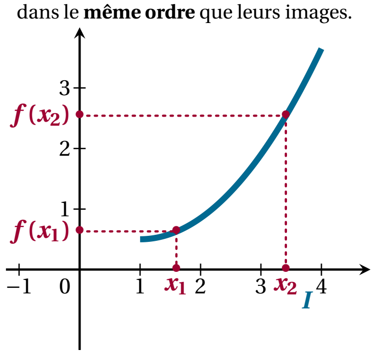
5.1 Variations d'une fonction

Définition

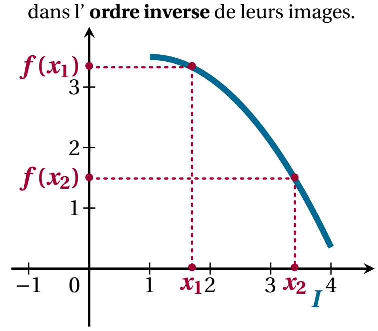
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- Si pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, f est dite **croissante** sur I.
- Si pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, f est dite **décroissante**sur I.

f est croissante sur I :
deux nombres de I sont rangés
dans le **même ordre** que leurs images.



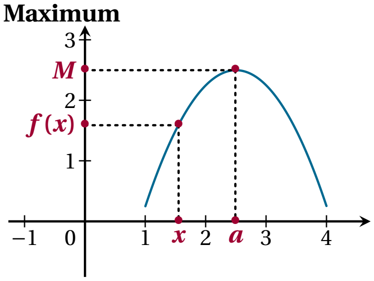
f est décroissante sur I :
deux nombres de I sont rangés
dans l' **ordre inverse** de leurs images.



Définition

- Dire que f admet un **maximum** en a sur l'intervalle I signifie que :
  Il existe un réel M tel que pour tout x dans I : $f(x) \leqslant M$ et $M = f(a)$.
- Dire que f admet un **minimum** en b sur l'intervalle I signifie que :
  Il existe un réel m tel que pour tout x dans I : $f(x) \geqslant m$ et $m = f(b)$
- Un **extremum** est le terme générique pour désigner un maximum ou un minimum.

Maximum



Minimum