Fonctions polynômes du second degré

1. Définitions

Définition 1
On appelle fonction **polynôme du second degré** toute fonction P définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

où $a(a \neq 0)$, b et c sont des réels appelés coefficients.

Exemples de fonctions polynômes du second degré, ou pas !

fonctions polynôme de degré 2	coefficients	autres fonctions
$P(x) = 2x^2 - 5x + 3$	$a = 2$, $b = -5$, $c = 3$	$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3$
$P(x) = -x^2 + 3$	$a = -1$, $b = 0$, $c = 3$	$P(x) = x - 5$
$P(x) = -7x^2 + 3x$	$a = -7$, $b = 3$, $c = 0$	$f(x) = x^2 - 5x + \dfrac{1}{x}$

Définition 2
Une expression de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $a \neq 0$ s'appelle la **forme canonique** d'un polynôme de degré 2.
Toute fonction polynôme admet une forme canonique.

Exemple : l'expression $P(x) = 2(x-1)^2 + 3$ est la forme canonique du polynôme $P(x) = 2x^2 - 4x + 5$.
En effet : $2(x-1)^2 + 3 = 2(x^2 - 2x + 1) + 3 = 2x^2 - 4x + 5 = P(x)$.

Définition 3
Sous certaines conditions sur a et β, une fonction polynôme peut admettre une troisième forme du type $a(x - x_1)(x - x_2)$ appelée **forme factorisée**.

Exemple : La forme factorisée du polynôme $P(x) = x^2 - 3x - 4$ est $P(x) = (x-4)(x+1)$.
En effet, $(x-4)(x+1) = x^2 + x - 4x - x = x^2 - 3x - 4 = P(x)$.

2. Variations et représentation graphique

Propriété

La fonction polynôme de degré 2 définie sur $]-\infty\,;\,+\infty[$ est :

- strictement décroissante puis strictement croissante **si** $a > 0$,
- strictement croissante puis strictement décroissante **si** $a < 0$,

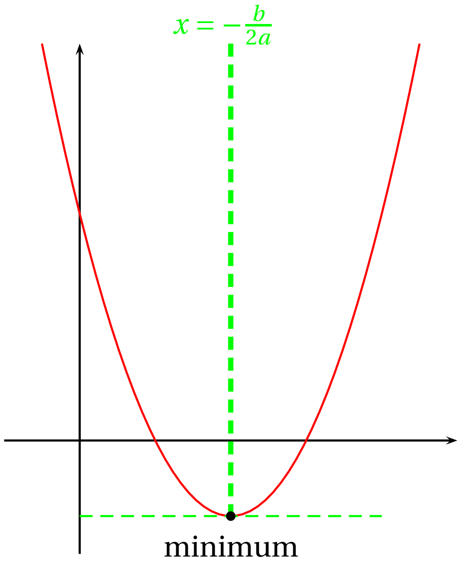
Tableau de variations et représentation graphique :

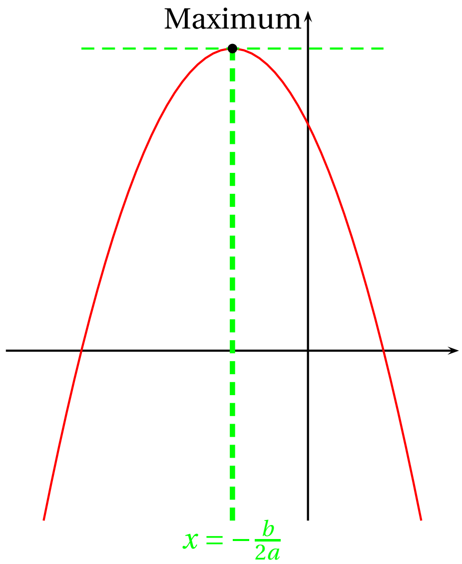
$a > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

$a < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$-\infty$





Dans un repère $(O; \vec{i}\,;\vec{j}\,)$, la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**,

cette parabole admet un **axe de symétrie** parallèle à l'axe des ordonnées.

Le point d'intersection de la parabole et de son axe de symétrie est le **sommet** de la parabole.

Méthodes pratiques pour déterminer les variations de P

- **Utilisation de la forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$.**

Si $a>0$, alors $a(x-\alpha)^2 \geq 0$
donc, $a(x-\alpha)^2+\beta \geq \beta$

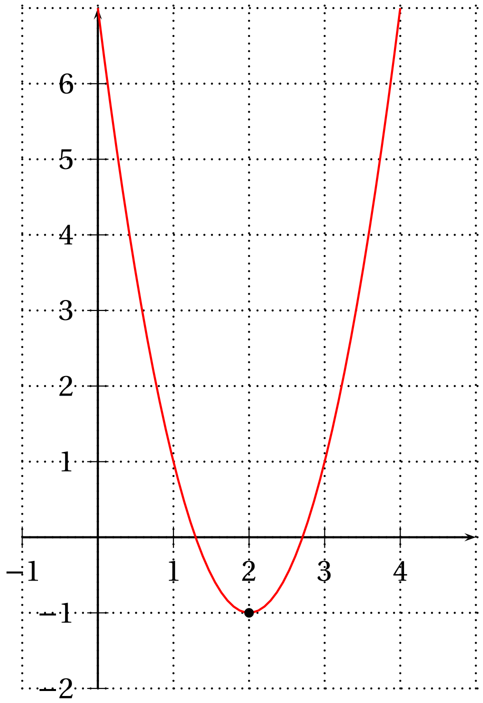
le minimum β est atteint lorsque $a(x-\alpha)^2=0$, c'est-à-dire pour $x=\alpha$.

Exemple
Soit $P(x)=2(x-2)^2-1$, on obtient :

P est décroissante sur $]-\infty\,;\,2\,]$,
croissante sur $[\,2\,+\infty\,[$.

Son minimum atteint en 2 vaut -1.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



Si $a<0$, alors $a(x-\alpha)^2 \leq 0$
donc, $a(x-\alpha)^2+\beta \leq \beta$

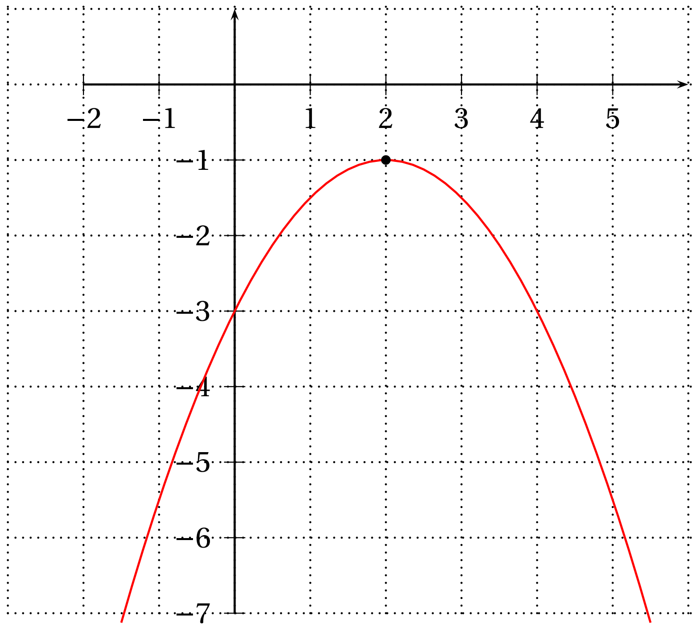
le Maximum β est atteint lorsque $a(x-\alpha)^2=0$, c'est-à-dire pour $x=\alpha$.

Exemple
Soit $P(x)=-\dfrac{1}{2}(x-2)^2-1$, on obtient :

P est croissante sur $]-\infty\,;\,2\,]$,
décroissante sur $[\,2\,+\infty\,[$.

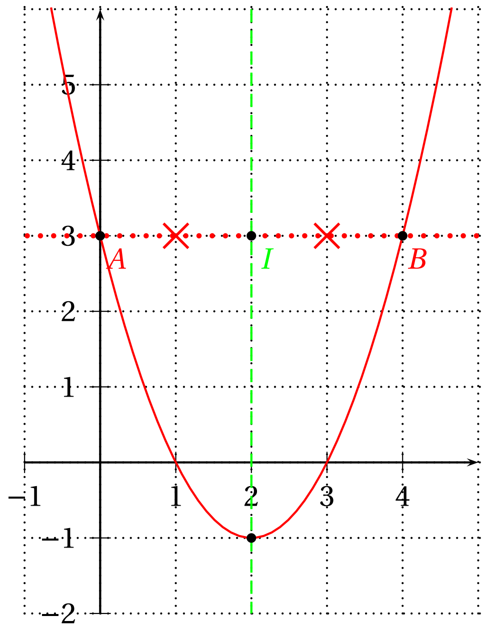
Son Maximum atteint en 2 vaut -1.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$



– **Utilisation de la propriété de symétrie de la courbe.**

Puisque la courbe est symétrique, si l'on trouve deux points A et B de cette courbe de même ordonnée, on en déduit que leur milieu I est situé sur l'axe de symétrie.
L'abscisse de I est donc l'abscisse de l'extremum.



Exemple
Soit $P(x) = x^2 - 4x + 3$:

On recherche par exemple les 2 points A et B qui ont pour abscisse $y = 3$.
Pour cela, on résout $P(x) = 3$:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 = 3 &\iff x^2 - 4x = 0 \\ &\iff x(x-4) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

L'abscisse du minimum est donc $x = \dfrac{0+4}{2} = 2$.
L'ordonnée vaut $P(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 3 = -1$.

P est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 2\ ]$,
croissante sur $[\ 2\ +\infty\ [$.

– **Utilisation de $x = -\dfrac{b}{2a}$.**
Exemple
Soit $P(x) = -x^2 - 2x + 3$.

$a = -1$ est négatif et $b = -2$ donc, $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2 \times (-1)} = -1$.

La fonction P est donc croissante sur $]-\infty\ ;\ -1\ ]$ et décroissante sur $[-1\ +\infty\ [$.
Son maximum est atteint pour $x - 1$ et vaut $P(-1) = 4$.