Corrigé des exercices sur la fonction inverse et les fonctions homographiques

Exercice 1

1. La solution est $\dfrac{1}{5}$.
2. La solution est $-\dfrac{2}{5}$.
3. L'ensemble solution est $\mathscr{S} =]-\infty ; 0[\cup]\dfrac{1}{3} ; +\infty[$.
4. L'ensemble solution est $\mathscr{S} =]-\infty ; -\dfrac{1}{2}[\cup]0 ; +\infty[$.
5. L'ensemble solution est $\mathscr{S} =]-\infty ; -\dfrac{1}{5}[\cup[\dfrac{1}{6} ; +\infty[$.

Exercice 2

1. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{1}{x} < 8 \iff \dfrac{1-8x}{x} < 0$. Considérons le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$1/8$		$+\infty$
$1-8x$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{1-8x}{x}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

L'ensemble solution est donc $S_1 =]-\infty ; 0[\cup]\dfrac{1}{8} ; +\infty[$.

2. Pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{1}{x} \geq 3 \iff \dfrac{1+3x}{x} \geq 0$. Considérons le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1/3$		0		$+\infty$
$1+3x$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{1+3x}{x}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

L'ensemble solution est donc $S_1 =]-\infty ; -\dfrac{1}{3}]\cup]0 ; +\infty[$.

3. Cette inéquation est réalisée si et seulement si les deux inéquations précédentes sont réalisées simultanément, donc l'ensemble solution est $S_1 \cap S_2 =]-\infty ; -\dfrac{1}{3}]\cup]\dfrac{1}{8} ; +\infty[$.

Exercice 3

1. Il faut que $x - 5 \neq 0$, c'est-à-dire que $x \neq 5$ donc $\mathscr{D}_f =]-\infty ; 5[\cup]5 ; +\infty[$.
2. Pour $x \neq 5$, $f(x) = 0 \iff 3x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{1}{3}$.
3. Voici le tableau de signe de f(x) :

x	$-\infty$		$1/3$		5		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

4. Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $3 + \dfrac{14}{x-5} = \dfrac{3 \times (x-5) + 14}{x-5} = \dfrac{3x-1}{x-5} = f(x)$.
5. $f(x) = 3 \iff \dfrac{14}{x-5} = 0$, ce qui est impossible. 3 n'admet donc pas d'antécédent par f.

6. On a $x \longrightarrow x-5 \longrightarrow \dfrac{1}{x-5} \longrightarrow \dfrac{14}{x-5} \longrightarrow 3+\dfrac{14}{x-5} = f(x)$ en appliquant successivement les opérations suivantes : on retranche 5, on passe à l'inverse, on multiplie par 14 puis on ajoute 3.

7. Sur l'intervalle $]5\,;+\infty[$: pour tous réels a et b tels que $5 < a < b$ alors $0 < a-5 < b-5$, on a donc $\dfrac{1}{a-5} > \dfrac{1}{b-5}$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, On en en déduit alors que $\dfrac{14}{a-5} > \dfrac{14}{b-5}$ donc que$3+\dfrac{14}{a-5} > 3+\dfrac{14}{b-5}$, c'est à dire $f(a) > f(b)$, ce qui signifie que f est strictement décroissante sur $]5;+\infty[$