Intersection d'une hyperbole et d'une droite.

1. On considère l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x$.
   Le but de cet exercice est de déterminer, parmi toutes les droites parallèles à $(\mathscr{D})$, celles qui ont au moins un point d'intersection avec $\mathscr{H}$. (On notera p l'ordonnée à l'origine de ces droites.)
   - **a.** A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer la réponse à cette question.
   - **b.** Pour répondre à cette question, quelle équation doit-on résoudre ?
   - **c.** Montrer que pour tout $x \neq 0$, l'équation $\dfrac{1}{x} = x + p$ équivaut à l'équation $\left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 - \dfrac{p^2}{4} - 1 = 0$.
   - **d.** Résoudre le problème posé.
2. On considère l'hyperbole $\mathscr{H}$ et la droite $(\mathscr{D}')$ d'équation $y = -x$.
   Le but de cet exercice est de déterminer, parmi toutes les droites parallèles à $(\mathscr{D}')$, celles qui ont au moins un point d'intersection avec $\mathscr{H}$. (On notera p l'ordonnée à l'origine de ces droites.)
   - **a.** A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, conjecturer la réponse à cette question.
   - **b.** Pour répondre à cette question, quelle équation doit-on résoudre ?
   - **c.** Montrer que pour tout $x \neq 0$, l'équation $\dfrac{1}{x} = -x + p$ équivaut à l'équation $\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 - \dfrac{p^2}{4} + 1 = 0$.
   - **d.** Montrer que le problème posé se résout en étudiant le signe de $\left(\dfrac{p}{2} - 1\right) \times \left(\dfrac{p}{2} + 1\right)$, puis résoudre ce problème.