Exemple d’étude d’une fonction polynôme du second degré.

(Un polynôme du second degré est une fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont trois réels, avec a non nul.)

Considérons la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=x^2-4x-5$.

Cette forme est la forme développée du polynôme P.

Ce polynôme peut aussi s'écrire $P(x)=(x-2)^2-9$.

Cette forme est appelée forme canonique.

Certains polynômes peuvent aussi s'écrire sous une troisième forme,

appelée forme factorisée. C'est le cas ici, car $P(x)=(x-5)(x+1)$.

Utilisons une de ces trois formes de P pour répondre à quelques questions.

$P(x)=x^2-4x-5$ $P(x)=(x-2)^2-9$ $P(x)=(x-5)(x+1)$

Q1: Résoudre l'équation $P(x)=0$.

Pour répondre à cette question, il est préférable d'utiliser la forme factorisée de P.

En effet, en utilisant la règle bien connue ,« un produit de facteur est nul si et seulement si un des facteurs est nul », la résolution de cette équation donne:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1)=0 \Leftrightarrow x-5=0 \text{ ou } x+1=0 \Leftrightarrow x= 5 \text{ ou } x= -1.$$

Cette équation admet donc comme ensemble solution $S=\{-1;5\}$.

$P(x)=x^2-4x-5$ $\qquad$ $P(x)=(x-2)^2-9$ $\qquad$ $P(x)=(x-5)(x+1)$

Q2: Résoudre l'équation $P(x)= -5$.

Pour répondre à cette question, il est préférable d'utiliser la forme développée de P.
En effet, on remarque qu'une simplification par -5 sera possible.

On a donc $P(x)= -5 \Leftrightarrow x^2-4x-5 = -5 \Leftrightarrow x^2-4x=0$.
Il ne reste plus qu'à factoriser x^2-4x pour terminer la résolution.

On a alors $P(x)= -5 \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x-4=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=4$.
L' ensemble solution de cette équation est donc $S=\{0;4\}$.

$P(x)=x^2-4x-5$ $P(x)=(x-2)^2-9$ $P(x)=(x-5)(x+1)$

Q3: Résoudre l'équation $P(x)=16$

Il est ici préférable d'utiliser la forme canonique, un bref test avec les deux autres mène à une impasse.

On a $P(x)=16 \Leftrightarrow (x-2)^2-9=16 \Leftrightarrow (x-2)^2-25=0 \Leftrightarrow (x-2)^2-5^2=0$

$\Leftrightarrow [(x-2)-5][(x-2)+5]=0$

$\Leftrightarrow (x-7)(x+3)=0 \Leftrightarrow x-7=0$ ou $x+3=0 \Leftrightarrow x=7$ ou $x=-3$.

L'ensemble solution de cette équation est $S=\{-3;7\}$.

Notez que nous avons utilisé l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ afin de factoriser l'expression $(x-2)^2-25$.

Nous aurions aussi pu écrire: $(x-2)^2=25 \Leftrightarrow x-2=\sqrt{25}$ ou $x-2=-\sqrt{25}$,ce qui donne les mêmes solutions.

$P(x)=x^2-4x-5$ $P(x)=(x-2)^2-9$ $P(x)=(x-5)(x+1)$

Q4: Montrer que P admet admet un minimum.

Pour montrer que P admet un minimum, il est plus judicieux d'utiliser la forme canonique de P, c'est-à-dire l'expression $P(x)=(x-2)^2-9$.

En effet, à l'aide de cette forme de $P(x)$, on peut remarquer que $P(2)=-9$ et que pour <u>tout</u> réel x, $(x-2)^2\geq 0$ donc que $(x-2)^2-9 \geq -9$ c'est-à-dire que $P(x)\geq -9$

ce qui prouve que -9 est le minimum de P et que ce minimum est atteint quand x vaut 2.

$P(x)=x^2-4x-5$ $P(x)=(x-2)^2-9$ $P(x)=(x-5)(x+1)$

Q5: Etudier les variations de la fonction P.

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser la forme canonique de P, et les résultats de cours sur la fonction carrée.

<u>Sur l'intervalle $]-\infty;2]$:</u> pour tous réels a et b tels que $a<b\leq 2$ alors $a-2<b-2\leq 0$, on en déduit que $(a-2)^2>(b-2)^2\geq 0$ car la fonction carrée est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$, on a donc $(a-2)^2-9>(b-2)^2-9\geq -9$, ce qui signifie que $P(a)>P(b)$.

La fonction P est donc strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;2]$.

<u>Sur l'intervalle $[2;+\infty[$:</u> comme la représentation graphique de P est une parabole qui admet la droite d'équation $x=2$ comme axe de symétrie, on en déduit que la fonction P est strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.