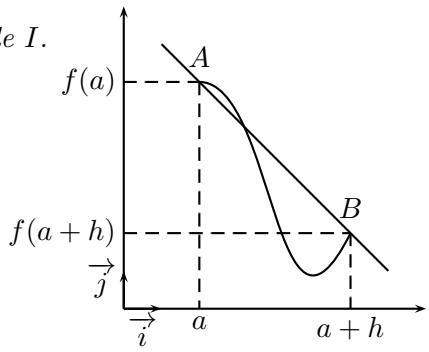
I Nombre dérivé d'une fonction en point



Définition 1 *f est une fonction définie sur un intervalle I et a est un réel de I.*
Dire que le réel l est le nombre dérivé de f en a signifie que :
la fonction $h \longmapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ $(h \neq 0)$ a pour limite l en zéro.
On dit alors que la fonction f est dérivable en a.

On note le nombre dérivé l de la fonction f en a, $f'(a)$.
La quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelée **taux de variation**.

Exemples :

- La fonction $f\ :\ x \longmapsto 2x+1$ est-elle dérivable en un réel a ?
  Pour $h \neq 0$, on peut écrire :
  $g(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{2(a+h)+1-(2a+1)}{h} = \frac{2h}{h} = 2$
  la fonction g admet 2 comme limite en zéro ; f est donc dérivable en a, son nombre dérivé est 2.
- La fonction $f\ :\ x \longmapsto x^3-7$ est-elle dérivable en $a=2$?
  Pour $h \neq 0$, on peut écrire :
  $g(2) = \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^3-7-(2^3-7)}{h} = \frac{12h+6h^2+h^3}{h} = 12+6h+h^2$
  la fonction g admet 12 comme limite en zéro ; f est donc dérivable en $a=2$, et son nombre dérivé est $f'(2)=12$.

II Intérprétation du nombre dérivé

1) interprétation graphique

Soit une fonction f dérivable en a. On appelle C_f sa représentation graphique. On désigne par A et M les points de C_f d'abscisse respective a et $a+h$. la droite (AM) a pour coefficent directeur :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Quand h tend vers 0, ce coefficient directeur tend vers le nombre dérivé de f en a.

Théorème 1 *Si f est une fonction dérivable en a, la représentation graphique de f admet au point $(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$*

Conséquence :

Propriété 1 *Equation de la tangente*
Si f est dérivable en a, alors une équation de la tangente en $M_a(a, f(a))$ à la courbe représentative de f est :

$$y = f'(a)x + f(a) - af'(a)$$

2) interprétation cinématique

Un mobile se déplace sur une trajectoire rectiligne entre un point A et un point B.
A chaque instant t on peut associer la distance $AM = d(t)$ qui sépare le mobile du point départ A.
On définit ainsi une fonction $d\ :\ t \longmapsto d(t) = AM$.
Le rapport $\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$ représente la vitesse *moyenne* du mobile entre les instants t_0 et t_0+h.
Si la fonction d est dérivable en t_0, la limite de $\frac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$ quand h tend vers 0 est la vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0.

Définition 2 *La vitesse instantanée d'un mobile à l'instant t_0 est le nombre dérivée en t_0 de la fonction horaire du mobile.*

III Fonction dérivée

Si une fonction f définie sur un intervalle I est dérivable en tout point de I on dit que la fonction est dérivable sur I.

Exemples :

• Fonction carré $f\ :\ x \longmapsto x^2$.

Pour tout $x_0\ \in\ \mathbb{R}$ le nombre dérivé de f en x_0 est $2x_0$; la fonction

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto 2x \end{aligned}$$

est la fonction dérivée de f.

le nombe dérivé de f en 3 est donc $f'(3) = 6$.

• Fonction affine $f\ :\ x \longmapsto mx + p$.

Pour tout $x_0\ \in\ \mathbb{R}$ le nombre dérivé de f en x_0 est m ; la fonction

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto m \end{aligned}$$

est la fonction dérivée de f.

IV Opérations sur les fonctions dérivables

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I.

1) Addition et multiplication

Les fonctions $u + v$, ku ($k \in \mathbb{R}$) et uv sont dérivables sur I et on a :

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(ku)' = ku'$
- $(uv)' = u'v + uv'$

Dérivée de u^n :

Si $u = v$ on $(u^2)' = u'u + uu' = 2u'u$.

D'autre part $(u^3)' = (uu^2)' = u'(u^2) + u(2u'u) = 3u'u^2$.

Plus généralement, pour tout entier $n \geq 2$, $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

En particulier si $u(x) = x$ on obtient :

la fonction $f : x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1} = nx^{n-1}$

2) Division et inverse :

Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I,

et si v est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que pour tout $a\ \in\ I$, $v(a) \neq 0$,

alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont des fonctions dérivables sur I et on a :

- $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Principe de la démonstration :
Pour $h \neq 0$ et $a \in I$ on a :

$$\tau_a(h) = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{v(a+h)} - \frac{1}{v(a)}\right]$$

$$\tau_a(h) = \frac{1}{h}\left[\frac{v(a)-v(a+h)}{v(a+h)v(a)}\right]$$

$$\tau_a(h) = \overbrace{\frac{1}{h}\left[v(a) - v(a+h)\right]}^{\text{tend vers } -v'(a)} \times \overbrace{\frac{1}{v(a+h)v(a)}}^{\text{tend vers } \frac{1}{v(a)^2}}$$

$\tau_a(h)$ tend vers $-\frac{v'(a)}{v(a)}^2$ quand h tend vers 0.

On en déduit que pour tout $a \in I$ le nombre dérivé de $\frac{1}{v}$ en a est $-\frac{v'(a)}{v(a)}^2$.

3) Fonction composée :

Théorème 2 *u est une fonction dérivable sur un intervalle I.*
a et b des réels et $a \neq 0$.
J est l'intervalle, ensemble des réels x tels que $ax + b \in I$.
la fonction $v \ :\longmapsto u(ax+b)$ dérivable sur J et pour tout réel x_0 de J on a :

$$v'(x_0) = au'(ax_0 + b).$$

V Tableau des dérivées des fonctions usuelles :

Fonction f	Fonction f'	Ensemble de définition de f'
$x \longmapsto a$	$x \longmapsto 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$x \longmapsto ax + b$	$x \longmapsto a$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$x \longmapsto nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$x \longmapsto \frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$x \longmapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'} =]0; +\infty[$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto \cos(x)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto -\sin(x)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$

VI Lien entre la dérivation et sens de variation d'une fonction

Théorème 3

Si une fonction f est dérivable et monotone sur l'intervalle I alors sa dérivée est de signe constant sur I.

- *Si f est dérivable et croissante sur I alors f' est positive ou nulle sur I.*
- *Si f est dérivable et décroissante sur I alors f' est négative ou nulle sur I.*

Justification :

Supposons que f soit une fonction dérivable et croissante sur l' intervalle I. La fonction f étant croissante sur I, pour tous les réels distincts a et $a + h$ de I, les réels h et $f(a + h) - f(a)$ sont de même signe donc $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \geq 0$.

$f'(a)$ est la limite en 0 de la fonction $x \longmapsto \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Etant donné que le réel $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ positif est ausssi proche que l'on veut de $f'(a)$, on conçoit et l'on admet que $f'(a) \geq 0$. Ainsi, si f est une fonction dérivable et croissante sur un intervalle I alors pour tout réel a de I, $f'(a) \geq 0$.

Même raisonnement pour f une fonction dérivable et décroissante sur l'intervalle I.

On s'intéresse à la réciproque, et nous admettons le résultat suivant :

Théorème 4
• *Si f' est strictement positive sur I sauf en un nombre fini de réels de I où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.*
• *Si f' est strictement négative sur I sauf en un nombre fini de réels de I où f' s'annule, alors f est scritement décroissante sur I.*

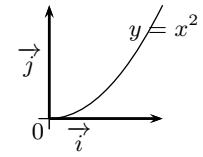
Exercice Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$.

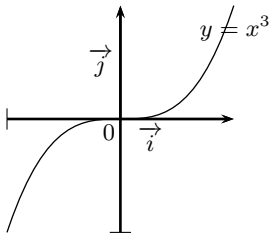
VII Extremum d'une fonction

Théorème 5
f est une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert I.
Si f admet un extremum en un réel x_0 de I, alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques :

• Il est indispensable que l'intervalle I soit un ouvert. Considérons par exemple la fonction $f\ :\ x \longmapsto x^2$ sur $I = [0; 1]$,
$f(1) = 1$ est le maximum de la fonction f sur I et pourtant $f'(1) = 2 \neq 0$.





• La réciproque est fausse. Si $f'(x_0) = 0$, la fonction f n'admet pas nécessairement un extremum en x_0. Considérons par exemple la fonction $f\ :\ x \longmapsto x^3$ sur $I =]-1; 1[$, on a $f'(0) = 0$ et pourtant $f(0)$ n'est pas un extremum de f.

On admet le théorème suivant :

Théorème 6
f est une fonction dérivable sur l'intervalle ouvert I.
Si f' sannule en x_0 de I en changeant de signe, alors f admet un extremum en x_0.